

半無窮域與雙異質以及平行域之壓電材料反平面問題理論解析

林儒禮

南臺科技大學機械工程系

ruli@stust.edu.tw

摘要

本文利用傅立葉轉換以及映射法來獲得由壓電材料所組成之全無窮域、半無窮域、雙異質以及單層平行域受點載荷作用下之反平面問題的理論解析解。施加之點載荷包含機械載荷如集中力與螺旋差排以及電載荷如點電荷與電壓，而所得到的理論解析解則包含壓電材料的位移場、應力場、電位移場與電場等，藉由理論解析解可以明白不同的邊界條件對於這些物理場的影響。最後將所得到的理論解析解配合實際的壓電材料係數將這些物理場繪製成圖形，除了可以驗證解函數的正確性之外，也可以用來了解壓電材料內物理場的分布特性。

關鍵詞：壓電材料、反平面問題、映射法

The Theoretical Analyze for the Antiplane Problem of a Piezoelectric Half-plane and Bimaterial and layered Medium

Ru-Li Lin

Department of Mechanical Engineering, Southern Taiwan University of Science and Technology

Abstract

Analytical solutions to the antiplane problem of the piezoelectric body subject to a point loading are obtained by Fourier transformation and image method in the study. The geometric configuration of the piezoelectric body includes infinite plane, half-plane, bimaterial, and single layer. The point loading consists of the antiplane shear force, screw dislocation, concentrated charge, and voltage. Based on these analytical solutions, the influence of boundary conditions on the field of displacement, stress, electric displacement, and electricity will be discussed. The numerical calculation with practical piezoelectric ceramics will be presented in figures in the paper. These figures will be used to verify the correctness of analytical solutions obtained in the study and explain the distribution of physical fields for the piezoelectric ceramics.

Keywords: Piezoelectric Body, Antiplane Problem, Image Method

壹、前言

壓電效應為固體材料內電能與機械能轉換的一種效應，具有此效應的材料稱之為壓電材料。1880年居里兄弟對電氣石施加機械載荷並在電氣石表面獲得電荷，而將此效應稱為正壓電效應，隔年居里兄弟發現此效應為可逆，即加電場於電氣石，電氣石產生機械變形，此效應即為逆壓電效應。利用壓電材料的正壓電效應可以做感測器，而逆壓電效應可應用於致動器，而由於材料的進步，最近也有利用壓電材料的正壓電效應來作用發電之應用。壓電材料大致分為單晶、陶瓷、薄膜與塑膠類，其中以陶瓷類應用最為廣泛，原因在於其壓電性能優越，價格便宜，而壓電陶瓷中又以 PZT 為代表性材料，壓電陶瓷雖然壓電性能極佳，然而質脆，因此在外力作用下容易機械損壞，因此不論想研究壓電陶瓷的發電特性或者分析其破壞性質，相關的基礎理論分析是必須的。

一、文獻回顧

在反平面力學的研究方面，最早由 Chou [1]提到半平面與角域的轉換特性以及映射法技巧的應用。接下來 Chou [2]利用映射法疊加出一平行域兩邊界各完美接和半無窮平面，並在內部受螺旋差排作用的理論解析解。Wu 與 Chiu [3]以及 Lin 與 Ma [4]分別探討半無窮多層異向性平行域與多層異向性平行域受反平面載荷的問題。Ting [5]則利用映射法原理，重新解析兩 1/4 平面完美接合的正交性材料受反平面載荷的問題。在壓電反平面力學研究方面，Pak[6]解析了壓電體受螺旋差排作用的反平面壓電力學問題，同時討論差排上的驅動力。Liu [7]等學者則解析了雙異質壓電材料在域內受螺旋差排作用之反平面壓電力學問題。Chue 與 Liu [8]利用級數展開方法，得到壓電材料組成的有限半徑角域受集中力與點電荷作用之反平面問題的解函數，同時也探討應力強度因子的問題。最近 Shen 和 Hung[9]則利用複變函數與級數展開法，探討了有限半徑角域之壓電材料受螺旋差排作用的反平面壓電力學問題。在平行域的問題研究上，Shen[10]則由異質壓電材料接合的連續條件，整理出多層壓電平行域反平面問題的級數形式解函數。Jiang 和 Cheung [11]獲得由三種壓電材料組成之複合圓柱受反平面載荷作用的解析解。

二、研究動機與方法

實際的壓電材料力學問題皆為三維問題，然而在某些幾何形狀與特定載荷下，三維問題可以簡化成二維問題，而二維問題不外乎就是平面問題與反平面問題。雖然平面問題在工程應用上比較廣泛，但是在力學理論解析上比較複雜；相反的，反平面問題在工程應用上不若平面問題來的多，但在理論解析上相對於平面變形問題來得簡單，所以反平面問題之研究可以作為平面問題與三維問題理論解析的基礎，因此反平面壓電力學問題一直吸引不少學者持續研究。本文一開始將建立壓電力學反平面問題的理論模型與控制方程式，接下來利用傅立葉積分轉換得到全無窮域、半無窮域、雙異質體以及單層板受點載荷作用下之位移場、應力場與電場的理論解析解，並由解析解中了解邊界與連續條件對這些物理場的影響。除了了解壓電材料相關物理場的特性外，本文也將探討壓電力學反平面問題的映射法性質，這對於解決更複雜幾何形狀的壓電材料力學問題將有莫大的幫助。

貳、理論解析過程與結果

一、壓電材料反平面力學問題之控制方程式

對於壓電材料之靜彈力問題，其材料組合律可以表示如下

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} - e_{ijk}E_k, \quad D_i = e_{ikl}u_{k,l} + \epsilon_{ik}E_k \quad (1)$$

其中 σ_{ij} 、 c_{ijkl} 、 u_k 、 e_{ijk} 、 E_k 、 D_i 與 ϵ_{kl} 分別為應力、彈性常數、位移、壓電常數、電場、電位移與容

電常數。壓電材料為異向性材料，分別具有 21、18 與 6 個彈性、壓電與容電常數，因此理論的力學分析也格外複雜，並且在這種情況下，其平面問題與反平面問題是無法分離與分開討論的。然而對於業界最常使用的壓電陶瓷，這種壓電材料具有一等向性平面，分別具有 5、3 與 2 個彈性、壓電與容電常數，在這種情況下，其反平面問題與平面問題是可以分離且可以分開討論的。若考慮此種壓電陶瓷材料，其極化方向沿 x_3 軸，因此 $x_1 - x_2$ 平面為等向性平面，此時方程式(1)的材料組合律可以進一步表示成矩陣形式如下：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

(2)式中的 ϕ 為電勢能函數，其與電場 E_i 的關係為 $E_i = -\phi_{,i}$ 。

若所考慮的壓電材料，其幾何型態在 x_3 方向為無窮長，並沿 x_3 方向受一均勻反平面線載荷的作用，如圖 1 所示。在此情況下，壓電體的平面內的彈性力學場 σ_{11} 、 σ_{12} 、 σ_{22} 、 u_1 與 u_2 和平面內電學場 D_1 、 D_2 、 E_1 與 E_2 是無關的。而反平面的彈性力學場 σ_{13} 、 σ_{23} 與 u_3 和平面內電學場 D_1 、 D_2 、 E_1 與 E_2 是耦合的。

為了方便，我們令 $u_3 \rightarrow w$ 、 $c_{44} \rightarrow \mu$ 、 $e_{15} \rightarrow e$ 、 $\varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon$ 、 $\sigma_{13} = T_1$ 以及 $\sigma_{23} = T_2$ ，因此(2)式之反平面力學場與平面電學場的關係可以進一步表示成

$$T_1 = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad T_2 = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \quad (3a)$$

$$D_1 = e \frac{\partial w}{\partial x_1} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad D_2 = e \frac{\partial w}{\partial x_2} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (3b)$$

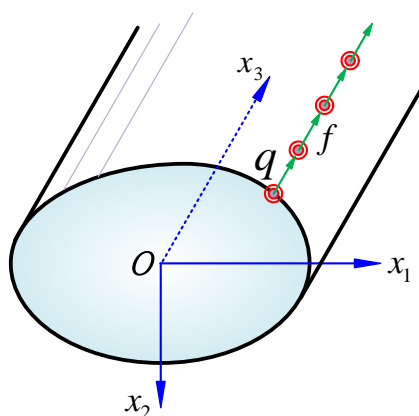


圖1 壓電體反平面問題示意圖

對於反平面力學與平面電學所需滿足的平衡方程式可以表示成

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4)$$

將(3)式帶入(4)式中並整理可得

$$\mu \nabla^2 w + e \nabla^2 \phi = 0, \quad e \nabla^2 w - \varepsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad (5)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 為拉普拉斯運算子。

解(5)式中的聯立偏微分方程式可得

$$\nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (7)$$

(7)式即為壓電力學反平面問題的控制方程式，解出此方程式並配合適當的邊界條件，就可以得到壓電材料內位移場、應力場與電場的理論解析解，配合數值計算就可以得到這些物理場的分布情況。

二、具不同幾何形狀壓電體之理論解析

接下來將利用(7)式的控制方程式，配合傅立葉轉換與映射法技巧以及適當的邊界條件來獲得全無窮域、半無窮窮域、雙異質體以及單層板等幾何形狀受點載荷作用下的解函數。

為了得到壓電力學反平面問題的理論解析解，我們引進傅立葉轉換對如下：

$$\tilde{g}(\omega, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\omega x_1} dx_1, \quad g(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega, x_2) e^{i\omega x_1} d\omega \quad (8)$$

首先將(8)式之積分轉換施於控制方程式(7)式，使其變成常微分方程式，因此在轉換域下，(7)式的解函數可以輕易求得並表示成

$$\tilde{w} = c_1 e^{\omega y} + c_2 e^{-\omega y}, \quad \tilde{\phi} = c_3 e^{\omega y} + c_4 e^{-\omega y} \quad (9)$$

然後再將(8)式之積分轉換施加於(3)式，並將(9)式之解函數帶入(3)式，使得位移、電勢能、應力與電位能在轉換域下的解函數可以表示成

$$\begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{D}_2 \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \mu & -\mu & e & -e \\ e & -e & -\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\omega y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\omega y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\omega y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

而 c_j 為邊界條件所決定的常數，以下就針對不同的幾何型態以及邊界條件來獲得待定常數 c_j ，再利用傅立葉反轉換獲得該問題的理論解析解。

(一)全無窮域受點載荷之解函數

考慮一全無窮域的壓電材料，在域內 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受反平面線力 f 、線電荷 q 、螺旋差排 b 以及電壓 v 的作用，如圖 2 所示。若在載荷施加處且沿 $x_2 = h$ 之虛線將此壓電體分成上(-)、下(+)兩部分，則在此虛線位置的跳躍條件在轉換域下可以寫成

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_2^{(-)} \\ \tilde{D}_2^{(-)} \\ \tilde{w}^{(-)} \\ \tilde{\phi}^{(-)} \end{bmatrix}_{y=h} - \begin{bmatrix} \tilde{T}_2^{(+)} \\ \tilde{D}_2^{(+)} \\ \tilde{w}^{(+)} \\ \tilde{\phi}^{(+)} \end{bmatrix}_{y=h} = \begin{bmatrix} f \\ q \\ b/i\omega \\ v/i\omega \end{bmatrix} \quad (11)$$

利用轉換域下的解函數(10)式，配合(11)式的跳躍條件與無窮遠處物理場收斂的邊界條件，並配合傅立葉反轉換就可以得到壓電力學反平面問題的位移場與電勢能場為

$$w = -\frac{F}{4\pi s} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x}, \quad \phi = -\frac{Q}{4\pi s} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{v}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} \quad (12)$$

其中 $s = \epsilon\mu + e^2$ ， $F = \epsilon f + e q$ ， $Q = e f - \mu q$ 。而應力場與電位移場可由(3)式之關係求得如下

$$T_1 = -\frac{\mu F + e Q}{2\pi s} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\mu b + e v}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} = -\frac{f}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\mu b + e v}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \quad (13a)$$

$$T_2 = -\frac{\mu F + e Q}{2\pi s} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\mu b + e v}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} = -\frac{f}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\mu b + e v}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \quad (13b)$$

$$D_1 = -\frac{e F - \epsilon Q}{2\pi s} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\epsilon v - e b}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} = -\frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\epsilon v - e b}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \quad (13c)$$

$$D_2 = -\frac{e F - \epsilon Q}{2\pi s} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{e b - \epsilon v}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} = -\frac{q}{2\pi} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{e b - \epsilon v}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \quad (13d)$$

由(12)與(13)式可以得到幾個解函數的特性：(i) 點電荷 q 與集中力 f 對壓電材料反平面位移場 w 以及電勢能場 ϕ 的解函數是相同的。(ii) 點電荷 q 對反平面剪應力場 T_1 與 T_2 不會有作用，相對的集中力 f 也不會影響平面電位移場 D_1 與 D_2 。(iii) 螺旋差排 b 對電勢能場 ϕ 不會有影響，平面電壓 v 對反平面位移場 w 沒有作用。(iv) s 可以視為壓電反平面問題的等效材料常數， F 可以視為廣義的反平面機械載荷，而 Q 則可視為廣義的電荷載荷。

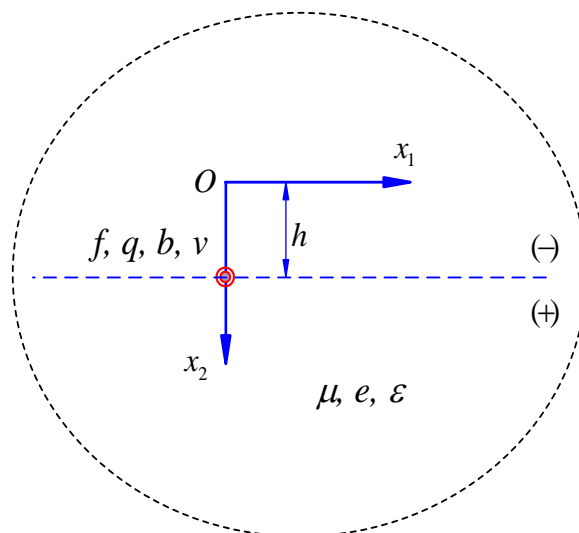


圖 2 全無窮域壓電材料受點載荷作用示意圖

(二)半無窮域受點載荷之解函數

考慮一由壓電材料所組成的半全無窮域，在域內 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受反平面線力 f 、線電荷 q 、螺旋差排 b 以及電壓 v 的作用，如圖 3(a)所示。對於這樣的問題，其位移場與電勢能場的解函數可以利用全無窮域的解函數(12)式配合映射法的技巧來建立，而無須重新解題，映射點的位置與映射量大小的映射性質如圖 3(b)所示。因此半無窮域受點載荷問題的位移場與電勢能場的解函數可以寫成

$$w = -\frac{F}{4\pi s} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} - \frac{F'}{4\pi s} \ln(x^2 + (y+h)^2) + \frac{b'}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y+h}{x} \quad (14a)$$

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi s} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{v}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} - \frac{Q'}{4\pi s} \ln(x^2 + (y+h)^2) + \frac{v'}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y+h}{x} \quad (14b)$$

其中 $F' = ef' + eq'$ 、 $Q' = ef' - \mu q'$ 、 b' 與 v' 為滿足邊界條件而在映射點上所需施加的映射量，其值由邊界條件決定。由於邊界條件包含二種，一為力學條件即自由邊界與固定邊界，二為電學條件即絕緣或導電邊界，因此有四種邊界條件的組合，以下針對每種邊界條件來探討映射量的值，同時也可以獲得解函數。

(i) 自由且絕緣

即在邊界 $x_2 = 0$ 處， $T_2(x_1, 0) = D_2(x_1, 0) = 0$ ，為了滿足邊界條件，所需的映射量大小為

$$F' = F, \quad Q' = Q, \quad b' = -b, \quad v' = -v. \quad (15)$$

(ii) 固定且導電

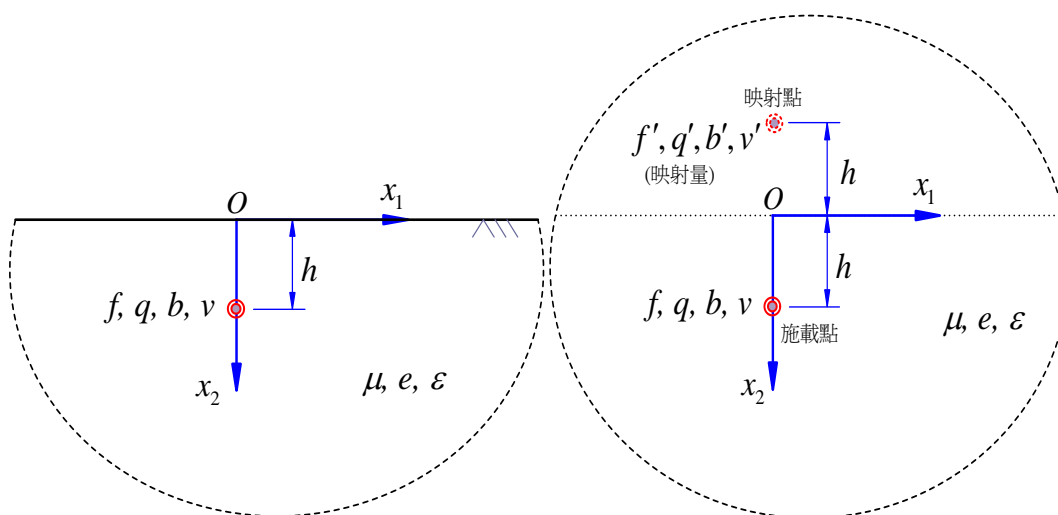
即在邊界 $x_2 = 0$ 處， $w(x_1, 0) = \phi(x_1, 0) = 0$ ，在此情況，映射量大小為

$$F' = -F, \quad Q' = -Q, \quad b' = b, \quad v' = v \quad (16)$$

(iii) 自由且導電

即在邊界 $x_2 = 0$ 處， $T_2(x_1, 0) = \phi(x_1, 0) = 0$ ，在此情況，映射量大小為

$$F' = F + \frac{2e}{\mu} Q, \quad Q' = -Q, \quad b' = -b - \frac{2e}{\mu} v, \quad v' = v \quad (17)$$



(a) 半無窮域壓電材料受點載荷作用示意圖 (b) 半無窮域映射法之映射性質示意圖

圖 3 半無窮域壓電材料之反平面問題

表 1 不同邊界條件下映射點上映射量大小

	自由且絕緣	固定且導電	自由且導電	固定且絕緣
f'	f	$-f$	f	$-f - \frac{2e}{\varepsilon}q$
b'	$-b$	b	$-b - \frac{2e}{\mu}v$	b
q'	q	$-q$	$-q + \frac{2e}{\mu}f$	q
v'	$-v$	v	v	$-v + \frac{2e}{\varepsilon}b$

(iv) 固定且絕緣

即在邊界 $x_2 = 0$ 處， $w(x_1, 0) = D_2(x_1, 0) = 0$ ，在此情況，映射量大小為

$$F' = -F, \quad Q' = Q - \frac{2e}{\varepsilon}F, \quad b' = b, \quad v' = -v + \frac{2e}{\varepsilon}b \quad (18)$$

若利用 $F' = \mathcal{E}' + e q'$ 與 $Q' = e f' - \mu q'$ 的關係式，將映射量 F' 和 Q' 進一步拆解成 f' 和 q' ，則可得到映射點上的映射量與邊界條件的完整關係，並整理於表 1。由表 1 可以得到兩點結論：第一，在自由且絕緣或者固定且導電的邊界條件下，若施載點只有集中力 f 或點電荷 q ，則映射點所需的映射量也只有相同大小的集中力 f 或點電荷 q ；相似的，若施載點只有螺旋差排 b 或電壓 v ，則映射點上的映射量也只有相同大小但反向的螺旋差排 b 或電壓 v 。第二，在自由且導電的邊界條件下，若施載點只有集中力 f 或者電壓 v 時，則在映射點的映射量卻分別存在有點電荷 q' 以及螺旋差排 b' ；再固定且絕緣的邊界條件下，若施載點只有點電荷 q 或者螺旋差排 b 時，則在映射點的映射量卻分別存在有集中力 f' 以及電壓 v' 。

(三) 雙異質壓電材料受點載荷之解函數

考慮一全無窮域，壓電材料 1 與壓電材料 2 分別佔據下半部與上半部區域，在 $x_2 = 0$ 的接合面上為完美接合，並令在材料 1 之域內 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受反平面線力 f 、線電荷 q 、螺旋差排 b 以及電壓 v 的作用，如圖 4 所示。對於這個壓電問題的解函數，在壓電材料 1 可以利用映射法建構出其解函數如下：

$$w_1 = -\frac{F_1}{4\pi s_1} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} - \frac{F'_1}{4\pi s_1} \ln(x^2 + (y+h)^2) + \frac{b'_1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y+h}{x} \quad (19a)$$

$$\phi_1 = -\frac{Q_1}{4\pi s_1} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{v}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} - \frac{Q'_1}{4\pi s_1} \ln(x^2 + (y+h)^2) + \frac{v'_1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y+h}{x} \quad (19b)$$

其映射法的幾何性質如圖 5(a)，其中 $s_1 = \varepsilon_1 \mu_1 + e_1^2$ ， $F_1 = \varepsilon_1 f + e_1 q$ ， $Q_1 = e_1 f - \mu_1 q$ ，而 F'_1 ， b'_1 ， Q'_1 與 v'_1 為滿足接觸面連續條件而在映射點上所需施加的映射量。

對於材料 2，其解函數也可以利用映射法建構出並表示如下：

$$w_2 = -\frac{F'_2}{4\pi s_2} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{b'_2}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x}, \quad \phi_2 = -\frac{Q'_2}{4\pi s_2} \ln(x^2 + (y-h)^2) + \frac{v'_2}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-h}{x} \quad (20)$$

其映射法的幾何性質如圖 5(b)，其中 $s_2 = \varepsilon_2 \mu_2 + e_2^2$ ，而 F'_2 ， b'_2 ， Q'_2 與 v'_2 為滿足接觸面連續條件而在映射點上所需施加的映射量。

最後由接觸面的連續條件可以解出壓電材料 1 在映射點上所需的映射量大小為

$$f'_1 = \frac{(\varepsilon_+ \mu_- + e_+ e_-)f + 2(\mu_1 e_2 - \mu_2 e_1)q}{s_a}, \quad b'_1 = -\frac{(\varepsilon_+ \mu_- + e_+ e_-)b + 2(e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)v}{s_a} \quad (21a)$$

$$q'_1 = \frac{2(e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)f + (\varepsilon_- \mu_+ + e_+ e_-)q}{s_a}, \quad v'_1 = -\frac{2(\mu_1 e_2 - \mu_2 e_1)b + (\varepsilon_- \mu_+ + e_+ e_-)v}{s_a} \quad (21b)$$

其中 $s_a = \varepsilon_+ \mu_+ + e_+^2$, $\mu_{\pm} = \mu_1 \pm \mu_2$, $e_{\pm} = e_1 \pm e_2$, $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ 。

而壓電材料 2 在映射點上所需的映射量大小為

$$f'_2 = \frac{2(\varepsilon_+ \mu_2 + e_+ e_2)f + 2(\mu_2 e_1 - \mu_1 e_2)q}{s_a}, \quad b'_2 = \frac{2((\mu_1 \varepsilon_+ + e_1 e_+)b + (e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)v)}{s_a} \quad (22a)$$

$$q'_2 = \frac{2(e_2 \varepsilon_1 - e_1 \varepsilon_2)f + 2(\mu_+ e_2 + e_+ e_2)q}{s_a}, \quad v'_2 = \frac{2((\mu_1 \varepsilon_2 - e_1 \mu_2)b + (\varepsilon_1 \mu_+ + e_1 e_+)v)}{s_a} \quad (22b)$$

由最後的結果可以發現，對於雙異質壓電材料，不論是材料 1 或者材料 2，其映射點上的映射量，集中力 f 和電荷 q 是耦合在一起的，另一方面，螺旋差排 b 與電壓 v 也是耦合不可分離的。

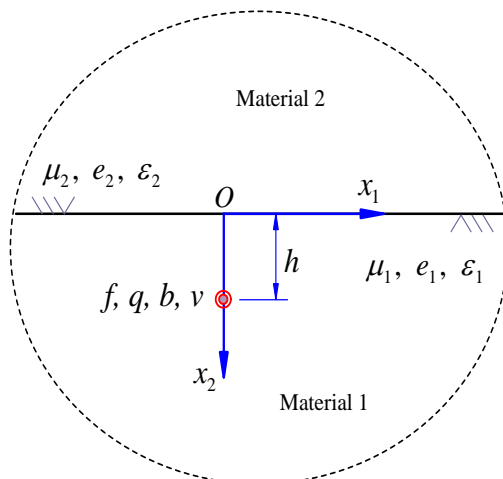
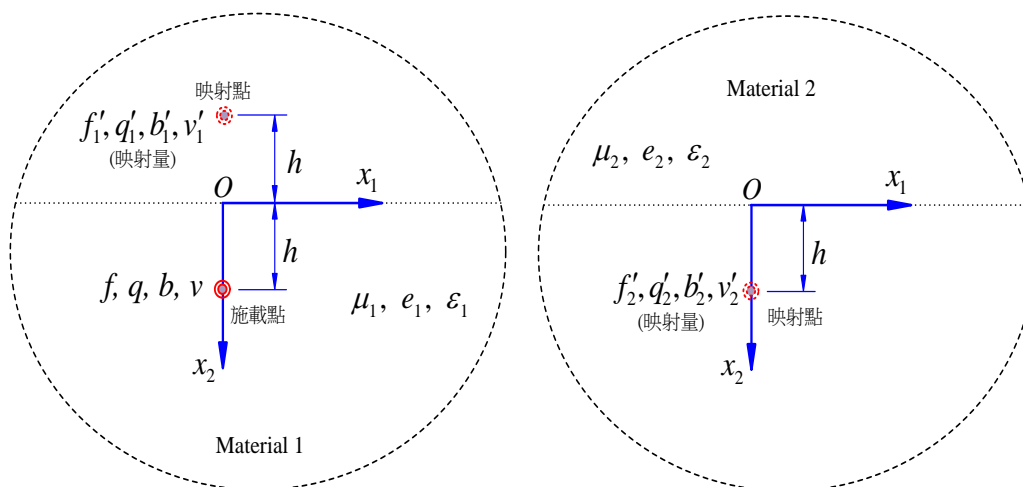


圖 4 雙異質壓電材料受點載荷作用示意圖



(a)雙異質問題壓電材料 1 的映射性質示意圖 (b)雙異質問題壓電材料 2 的映射性質示意圖

圖 5 雙異質壓電材料的映射性質

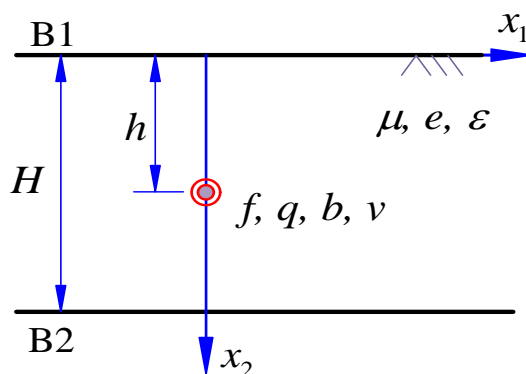


圖 6 無窮平行域內受點載荷示意圖

(四)單層無窮長平行域壓電材料受點載荷之解函數

如圖 6 所示，考慮一壓電材料組成的平面在 x_1 方向具有無窮長度，然而在 x_2 方向具有一厚度為 H 的平行域，在內部 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受一組載荷，即反平面集中力 f 、螺旋差排 b 、點電荷 q 以及電壓 v 的作用，B1 與 B2 分別代表 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = H$ 的邊界。對於這個問題，可以藉由傅立葉轉換以及複變積分中留數定理配合載荷的跳躍條件以及對應的邊界條件來求得，為了避免冗長的表示式，在此省略繁複的解題過程，僅列出該問題的位移場以及電勢能場，以下依照邊界條件不同分成四部份討論。

(i) 邊界 B1 與 B2 皆為自由且絕緣之邊界

即 $T_2(x_1, 0) = D_2(x_1, 0) = 0$ 與 $T_2(x_1, H) = D_2(x_1, H) = 0$ ，對於這種邊界條件，其位移場與電勢能場的解函數為

$$w = \frac{-F}{4\pi s} [\Omega^-(x_1, x_2^-) + \Omega^-(x_1, x_2^+)] + \frac{b}{2\pi} [O(x_1, x_2^+) - O(x_1, x_2^-)] \quad (23a)$$

$$\phi = \frac{-Q}{4\pi s} [\Omega^-(x_1, x_2^-) + \Omega^-(x_1, x_2^+)] + \frac{v}{2\pi} [O(x_1, x_2^+) - O(x_1, x_2^-)] \quad (23b)$$

其中 $\Omega^-(X, Y) = \ln \left[\cosh\left(\frac{\pi}{H} X\right) - \cos\left(\frac{\pi}{H} Y\right) \right]$ ， $O(X, Y) = \tan^{-1} \left[\coth\left(\frac{\pi}{2H} X\right) \tan\left(\frac{\pi}{2H} Y\right) \right]$ ， $x_2^\pm = x_2 \pm h$ 。

而對應的應力場與電位移場可由(3)式來求得。

(ii) 邊界 B1 與 B2 皆為固定且導電之邊界

即 $w(x_1, 0) = \phi(x_1, 0) = 0$ 與 $w(x_1, H) = \phi(x_1, H) = 0$ ，對於這種邊界條件，位移場與電勢能場的解函數為

$$w = \frac{-F}{4\pi s} [\Omega^-(x_1, x_2^-) - \Omega^-(x_1, x_2^+)] + \frac{b}{2\pi} [O(x_1, x_2^+) + O(x_1, x_2^-)] \quad (24a)$$

$$\phi = \frac{-Q}{4\pi s} [\Omega^-(x_1, x_2^-) - \Omega^-(x_1, x_2^+)] + \frac{v}{2\pi} [O(x_1, x_2^+) + O(x_1, x_2^-)] \quad (24b)$$

(iii) 上邊界 B1 為固定且導電，B2 為自由且絕緣的邊界

即 $w(x_1, 0) = \phi(x_1, 0) = 0$ 與 $T_2(x_1, H) = D_2(x_1, H) = 0$ ，其位移場與電勢能場的解函數為

$$w = \frac{-F}{4\pi s} \left[\Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) + \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] + \frac{b}{2\pi} \left[O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) + O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] \quad (25a)$$

$$\phi = \frac{-Q}{4\pi s} \left[\Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) + \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] + \frac{v}{2\pi} \left[O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) + O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] \quad (25b)$$

其中 $\Omega^+(X, Y) = \ln \left[\cosh \left(\frac{\pi}{H} X \right) + \cos \left(\frac{\pi}{H} Y \right) \right]$, $\Theta(X, Y) = \tan^{-1} \left[\tanh \left(\frac{\pi}{2H} X \right) \tan \left(\frac{\pi}{2H} Y \right) \right]$ 。

(iv) 對於壓電材料單層域，相反的，若上邊界 B_1 為自由且絕緣， B_2 為固定且導電的邊界即 $T_2(x_1, 0) = D_2(x_1, 0) = 0$ 與 $w(x_1, H) = \phi(x_1, H) = 0$ ，位移場與電勢能場的解函數為

$$w = \frac{-F}{4\pi s} \left[\Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) + \Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] + \frac{b}{2\pi} \left[O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) + \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] \quad (26a)$$

$$\phi = \frac{-Q}{4\pi s} \left[\Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) + \Omega^-(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) - \Omega^+(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] + \frac{v}{2\pi} \left[O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^-}{2}) - O(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) + \Theta(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2^+}{2}) \right] \quad (26b)$$

經由上面四種邊界條件的位移場與電勢能場的解函數可以得到幾個結論：第一，構成位移場與電勢能場的解函數皆為簡單的三角函數。第二，反平面集中力 f 以及點電荷 q 所造成的電位移場與電勢能場，解函數是相同的；另一方面，螺旋差排 b 所造成位移場的解函數以及電壓 v 造成電勢能場的解函數是相同的。第三，在邊界 B_1 與 B_2 的邊界條件相同情況下，即情況(i)與(ii)，位移場與電勢能場的解函數只有 $\Omega^-(X, Y)$ 和 $O(X, Y)$ 兩個；然而在邊界 B_1 與 B_2 邊界條件不相同的情況下，即情況(iii)與(iv)，位移場與電勢能場的解函數則有 $\Omega^-(X, Y)$ 、 $O(X, Y)$ 、 $\Omega^+(X, Y)$ 與 $\Theta(X, Y)$ 四個。

(五) 單層半無窮長平行域壓電材料受點載荷之解函數

如圖 7 所示，考慮一個由壓電材料組成的平面在 x_1 方向具有半無窮長度，然而在 x_2 方向具有一厚度為 H 的平行域，在內部 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受一組載荷，即反平面集中力 f 、螺旋差排 b 、點電荷 q 以及電壓 v 的作用， B_1 、 B_2 與 B_3 分別代表 $x_2 = 0$ 、 $x_2 = H$ 與 $x_1 = 0$ 的邊界。

對於這個問題的位移場與電勢能場的解函數，也可以利用映射法來獲得而無須從新解題，其映射性質如圖(8)所示。若邊界 B_1 與 B_2 的邊界條件為自由且絕緣，則本問題之位移場與電勢能場的解函數可以以全無窮域單層平行域之解函數(23)式為基本函數，再仿照半無窮域問題利用映射法來建構其解函數的方式如(14)式來完成。所以本問題的位移場與電勢能場的解函數可表示成

$$w = \frac{-F}{4\pi s} \left[\Omega^-(x_1^-, x_2^-) + \Omega^-(x_1^-, x_2^+) \right] + \frac{b}{2\pi} \left[O(x_1^-, x_2^+) - O(x_1^-, x_2^-) \right] - \frac{F'}{4\pi s} \left[\Omega^-(x_1^+, x_2^-) + \Omega^-(x_1^+, x_2^+) \right] + \frac{b'}{2\pi} \left[O(x_1^+, x_2^+) - O(x_1^+, x_2^-) \right] \quad (27a)$$

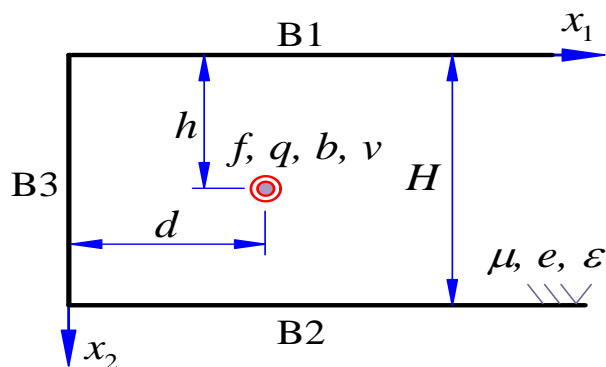


圖 7 半無窮平行域內受點載荷示意圖

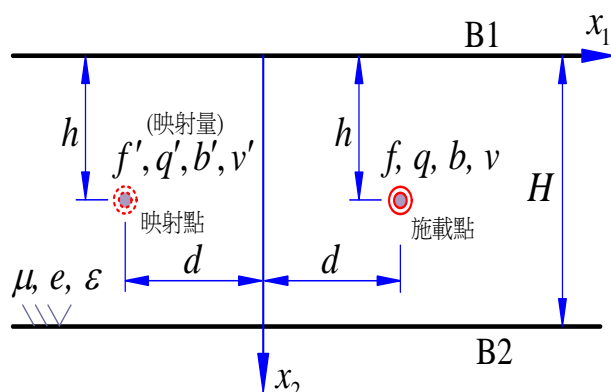


圖 8 半無窮平行域映射法示意圖

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{-Q}{4\pi\epsilon} [\Omega^-(x_1^-, x_2^-) + \Omega^-(x_1^-, x_2^+)] + \frac{\nu}{2\pi} [O(x_1^-, x_2^+) - O(x_1^-, x_2^-)] \\ & - \frac{Q'}{4\pi\epsilon} [\Omega^-(x_1^+, x_2^-) + \Omega^-(x_1^+, x_2^+)] + \frac{\nu'}{2\pi} [O(x_1^+, x_2^+) - O(x_1^+, x_2^-)] \end{aligned} \quad (27b)$$

其中 $F' = \epsilon f' + eq'$ 、 $Q' = ef' - \mu q'$ 以及 $x_1^\pm = x_1 \pm d$ 。

在映射點上所需疊加映射量 f' 、 q' 、 b' 與 ν' 的值，則由邊界條件 B3 來決定。令人感興趣的是，依照邊界 B3 的四種邊界條件，即自由且絕緣、固定且導電、自由且導電以及固定且絕緣，在映射點所需疊加映射量 f' 、 q' 、 b' 與 ν' 的值與表 1 是相同的。即邊界 B3 的邊界條件若為自由且絕緣，則(27)式中的 $F' = \epsilon f + eq$ 、 $Q' = ef - \mu q$ 、 $b' = -b$ 以及 $\nu' = -\nu$ 。

另一方面，若圖 7 中的半無窮單層平行域在邊界 B1 的條件為固定且導電，在邊界 B2 的條件為自由且絕緣，則這個問題的位移場與電勢能場的解函數，只需將(27)式中的基本函數變為(25)式即可，也就是

$$\begin{aligned} w = & \frac{-F}{4\pi\epsilon} \left[\Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) + \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\ & + \frac{b}{2\pi} \left[O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) + O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\ & - \frac{F'}{4\pi\epsilon} \left[\Omega^-\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^+\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^-\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) + \Omega^+\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\ & + \frac{b'}{2\pi} \left[O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) + O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned}
 \phi = & \frac{-Q}{4\pi s} \left[\Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) + \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\
 & + \frac{v}{2\pi} \left[O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) + O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\
 & - \frac{Q'}{4\pi s} \left[\Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Omega^-\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) + \Omega^+\left(\frac{x_1^-}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right] \\
 & + \frac{v'}{2\pi} \left[O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^-}{2}\right) + O\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) - \Theta\left(\frac{x_1^+}{2}, \frac{x_2^+}{2}\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{28b}$$

在映射點上所需疊加映射量 f' 、 q' 、 b' 與 v' 的值，同樣由邊界條件 B3 來決定。

參、數值計算與分析

在本節利用前文得到的理論解析解配合實際的壓電材料係數，畫出壓電材料受點載荷作用下各種物理場在 $x_1 - x_2$ 平面內的分布曲線，除了可以了解各種物理場的分布特性外，也可以驗證本文所得到理論解析解的正確性。

圖 9 與 10 分別為半無窮域壓電材料內 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受集中力 f 以及電壓 v 作用下的應力場 T_2 分布圖，邊界為自由且絕緣之邊界條件，由兩圖可知應力 T_2 在 $x_2 = 0$ 之邊界皆等於 0，滿足所設定的邊界條件。另外由圖 9 可以發現，應力 T_2 分布為正 8 字分布，其值只和 f 成正比相關，和材料係數無關。由圖 10 可發現，應力 T_2 分布為橫 8 字分布，其值和壓電常數 e 以及電壓 v 成正比相關。

圖 11 與 12 分別為雙異質壓電材料內 $(x_1, x_2) = (0, h)$ 處受集中力 f 作用下的應力場 T_2 與電場 E_1 分布圖，由兩圖可知應力 T_2 與電場 E_1 在 $x_2 = 0$ 之接合面皆有連續，滿足所設定的連續條件。此外由場分布圖可知，受 f 作用下的應力場 T_2 分布為正 8 字，電場 E_1 分布則為橫 8 字。本算例中，壓電材料 1 為 PZT4，其材料常數分別為 $\mu_1 = 25.6 \text{ GPa}$ 、 $e_1 = 12.7 \text{ C/m}^2$ 以及 $\varepsilon_1 = 6.46 \text{ nF/m}$ ；壓電材料 2 為 PZT7A，其材料常數分別為 $\mu_2 = 25.4 \text{ GPa}$ 、 $e_2 = 9.2 \text{ C/m}^2$ 以及 $\varepsilon_2 = 4.07 \text{ nF/m}$ 。

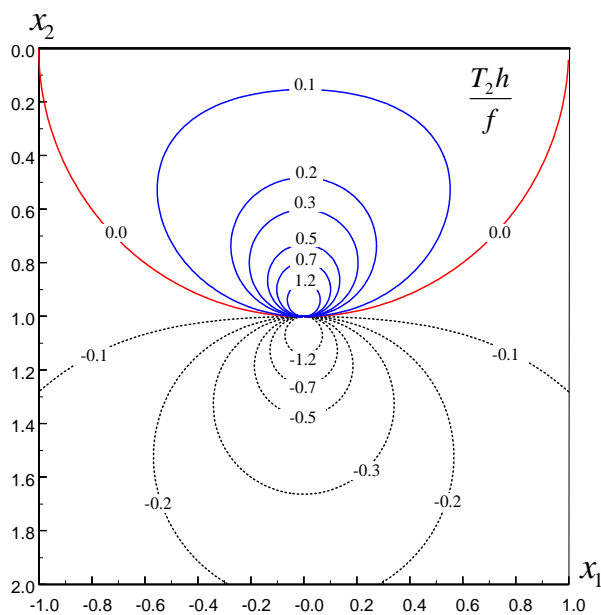


圖 9 半無窮域內受集中力 f 作用下的應力場分布

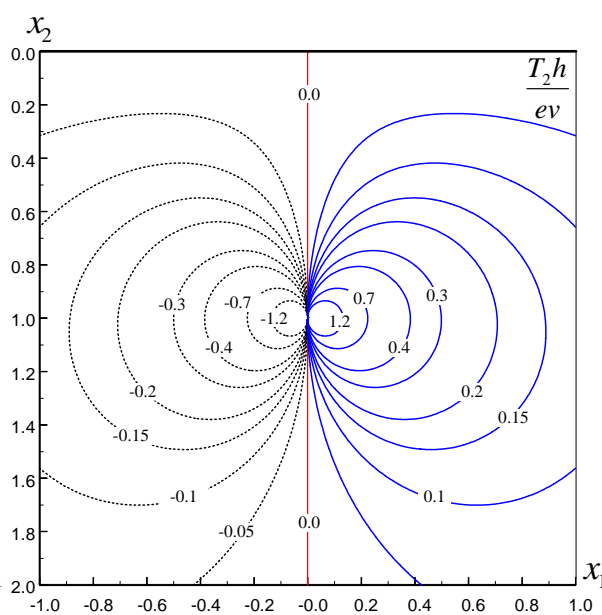


圖 10 半無窮域內受電壓 v 作用下的應力場分布

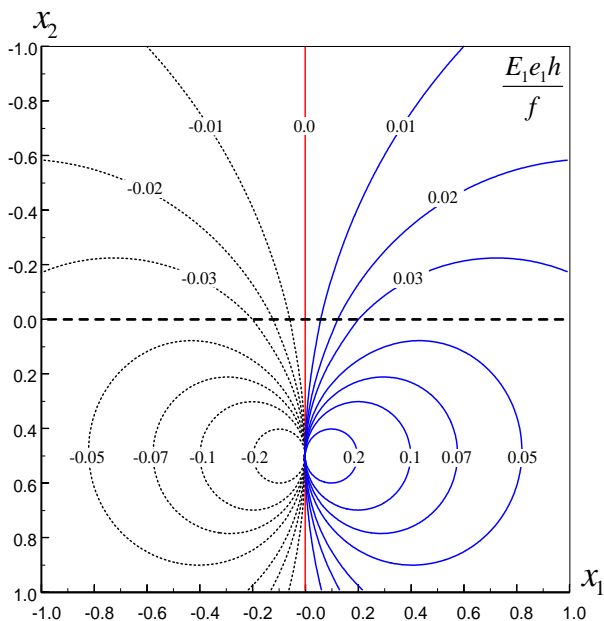
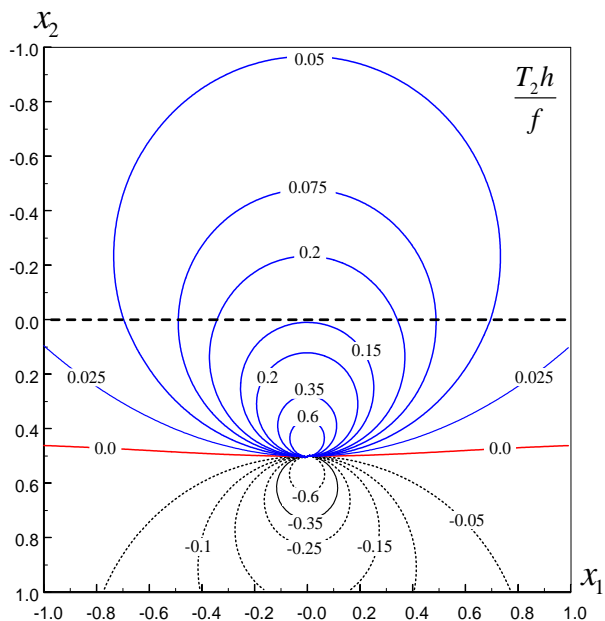


圖 11 雙異質壓電材料內受集中力 f 作用下的應力場分布 圖 12 雙異質壓電材料內受集中力 f 作用下的電場分布

圖 13 與 14 分別為單層無窮長平行域內 $(x_1, x_2) = (0, 0.4H)$ 處受集中力 f 作用下的應力場 T_2 與電場 E_1 分布圖，邊界 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = H$ 皆為自由且絕緣之邊界條件。由圖 13 中可發現， T_2 的分布滿足 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = H$ 為零曳引力的邊界條件，且其值和 f 成正比但和 H 成反比。由圖 14 中可知，電場 E_1 的值在 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = H$ 的邊界上並不為零，而其值和 f 成正比但和 e 與 H 成反比。

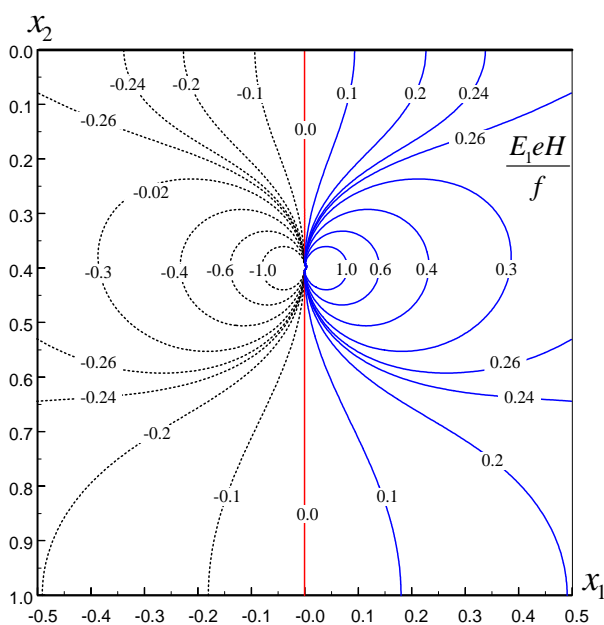
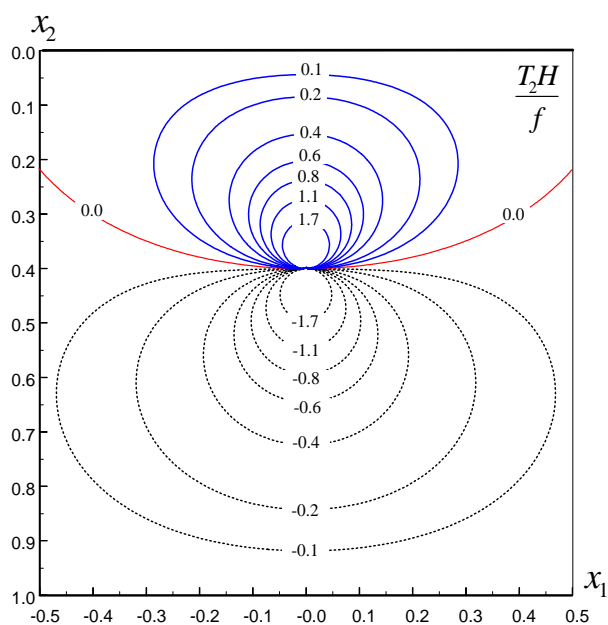


圖 13 無窮單層平行域內受集中力 f 作用下的應力場分布 圖 14 無窮單層平行域內受集中力 f 作用作用下的電場分布

圖 15 與 16 分別為單層半無窮長平行域內 $(x_1, x_2) = (0.5H, 0.4H)$ 處受集中力 f 作用下的應力場 T_1 與電場 E_1 分布圖，邊界 $x_2 = 0$ 、 $x_2 = H$ 與 $x_1 = 0$ 皆為自由且絕緣之邊界條件。由兩張圖可以發現，應力場 T_1 與電場 E_1 在邊界 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = H$ 上其值並不會等於零，然而在邊界 $x_1 = 0$ 上，兩者之值皆為零，滿足所設定的邊界條件。由圖 15 可知，應力場 T_1 的值和 f 成正比但和 H 成反比；由圖 16 可發現，電場 E_1 的值和 f 成正比但和 e 與 H 成反比

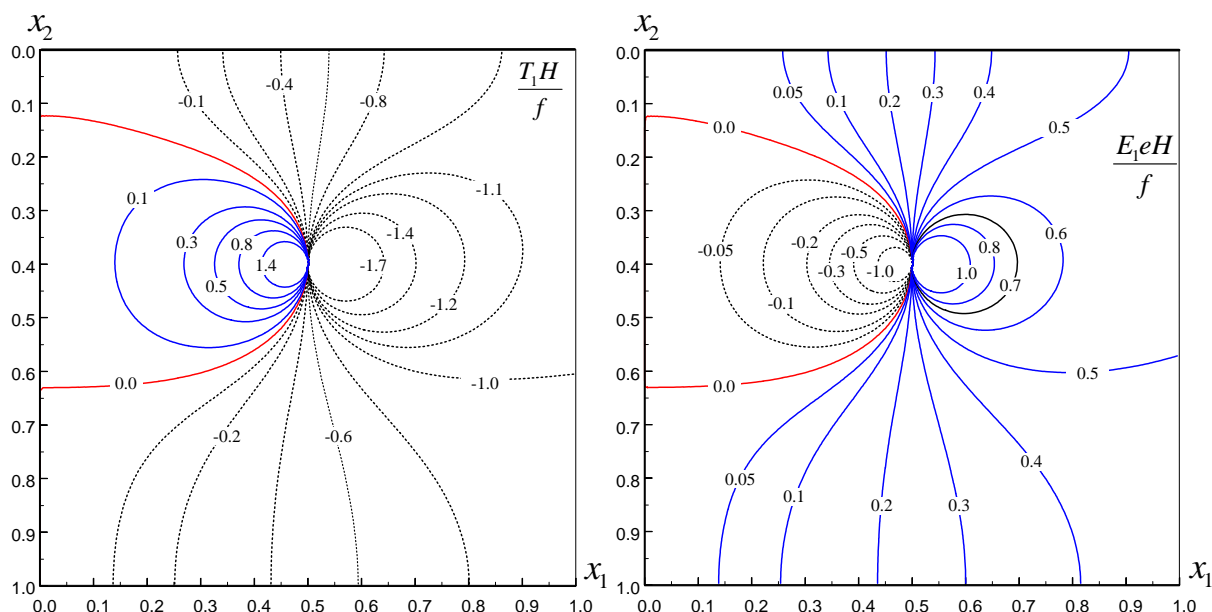


圖 15 半無窮單層平行域內受及中力 f 作用下的應力場分布 圖 16 半無窮單層平行域內受及中力 f 作用下的電場分布

肆、結論

在本文中，我們首先利用傅立葉轉換的技巧獲得全無窮域以及單層無窮長平行域壓電材料內受點載荷作用的理論解析解，接著利用映設法建構出半無窮域、雙異質與單層半無窮長平行域壓電材料內受點載荷作用的解函數，並將解函數配合實際壓電材料係數繪製其應力場與電場的全場分布圖。而在分析全無窮域壓電材料的格林函數時，可以發現集中力 f 與點電荷 q 對壓電材料的位移場 w 與電勢能場 ϕ 的分布是相同，因此可將這兩類載荷合併，其中可將 $F = ef + eq$ 視為廣義的力學集中力，而將 $Q = ef - \mu q$ 視為廣義的電學點電荷，這對於往後要面對更複雜的壓電力學問題之理論解析是有簡化效果的。此外我們也發現螺旋差排 b 對於位移場 w 的分布與電壓 v 對於電勢能場 ϕ 的分布是相同。

而本文利用應設法來建構半無窮域壓電材料反平面問題的解函數時，發現幾個映射性質。首先其映射點的位置與載荷施加點的位置對稱於邊界，也就是施加點與映射點的連線垂直邊界且和邊界等距。而在映射點上的映射量方面，當邊界條件為自由且絕緣或固定且導電時，若施加點施加 f 、 q 、 b 與 v 時，則映射點上的映射量也只是單純的 f 、 q 、 b 與 v 。但是若邊界條件變成自由且導電或者固定且絕緣時，則映射點上的映射量 f 與 q 以及 b 與 v 則分別有耦合的現象。這種耦合現象在雙異質壓電材料的解函數中更是明顯，對於雙異質材料，無論是材料 1 或者材料 2 映射點上的映射量， f 與 q 以及 b 與 v 是分別耦合在一起，不可分離的。

最後我們說明了，若了解壓電材料反平面問題的映射法性質，則可用來建構出其他負責問題的解函數，而無須重新解題。因此我們選了具無窮長平行域問題為例子，說明只要了解邊界條件與映射性質的關係，就可以簡單得到半無窮長平行域問題的解函數。對於雙異質平行域的問題，也可以簡單的利用此法來

建構出理論解析解。此外，若要使用映射法來建構出壓電材料常見的壓電多層域結構的反平面力學問題，理論上只要找出任意層與映射量經多次映射後的映射量變化關係後，也可以藉由此法建構出理論解析解。然而對於平面問題，其映射點上映射量，每經過一次的邊界映射後，映射量不再是單純的 f 、 q 、 b 、與 v ，因此難以用此方式來建構出理論解析解。

參考文獻

- [1] Y. T. Chou. (1965). Screw Dislocations near a Wedge-Shaped Boundary, *Acta Metallurgica*, 13, 1131-1134.
- [2] Y. T. Chou. (1966). Screw Dislocations in and near Lamellar Inclusions, *Physica Status Solidi*, 17, 509-516.
- [3] K. C. Wu and Y. T. Chiu. (1996). Antiplane Shear Interface Cracks in Anisotropic Bimaterials, *Journal of Applied Mechanics*, 58, 399-403.
- [4] R. L. Lin and C. C. Ma. (2000). Antiplane Deformation for Anisotropic Multilayered Media by Using the Coordinate Transform Method, *Journal of Applied Mechanics*, 67, 597-605.
- [5] T. C. T. Ting. (2005). Green's Functions for a Bimaterial Consisting of Two Orthotropic Quarter Planes Subjected to an Antiplane Force and a Screw Dislocation, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 10, 197-211.
- [6] Y. E. Pak. (1990). Force on a Piezoelectric Screw Dislocation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 57, 863-869.
- [7] J. Liu, S. Du, and B. Wang. (1999). A Screw Dislocation Interacting with a Piezoelectric Bimaterial Interface, *Mechanics Research Communications*, 26, 415-420.
- [8] C. H. Chue, and W. J. Liu. (2007). Antiplane electro-mechanical field of a piezoelectric finite wedge under shear loading and at fixed-grounded boundary conditions. *International Journal of Solids and Structure*, 44, 2540-2552.
- [9] M. H. Shen, and S. Y. Hung. (2013). Analysis of a piezoelectric finite wedge under antiplane concentrated loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, 76, 1-8.
- [10] M. H. Shen, S. N. Chen, and F. M. Chen. (2006). Anti-plane piezoelectric study on plane layered media. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, 630-637.
- [11] C. P. Jiang, and Y. K. Cheung. (2001). An exact solution for the three-phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its application to piezoelectric composites, *International Journal of Solids and Structure*, 38, 4777-4796.